Varianta 069

Subiectul I:

a) $\left|\frac{1+2i}{4+3i}\right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. b) $|DE| = 2\sqrt{14}$. c) $4x+3y=25$.

d) sin 4<0, deoarece $4 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. e) $A_\Delta = \frac{1}{2}$,.f) $a=3, b=4$.

Subiectul II:

1) a) Se verifică relația prin calcul.

b) Probabilitatea evenimentului ca $\hat{x} \in \mathbf{Z}_6$ verifică $\hat{x}^2 + \hat{x} + \hat{4} = \hat{0}$ este $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

c) Numărul funcțiilor bijective definite pe {1,2,3} cu valori în {5,6,7} este 3!=6.

d) Ecuația are soluția x=1.

e) Din relațiile lui Viète: $x_1x_2x_3x_4 = 1$.

2) a) $f'(x) = e^x + 2x, \forall x \in \mathbf{R}$ .b) $\int_0^1 f(x)dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = e - \frac{2}{3}$.

c) $f''(x) = e^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexă pe **R.**d) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = e+2$.

e) $e^x > 0, x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x) > 0$.

Subiectul III:

a) $O_2^1 = O_2, J^2 = O_2 \Rightarrow O_2, J$ sunt nilpotente.

b) $K^2 = K \neq O_2 \Rightarrow K^n = K, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow K^n \neq O_2, \forall n \in \mathbf{N}^* \Rightarrow K$ nu este nilpotentă.

$\det K = 0 \Rightarrow$ nu există $K^{-1} \in M_2(\mathbf{R})$.

c) Prin calcul se verifică relația dată.

d)

Din $A^2 = O_2 \Rightarrow (\det A)^2 = 0 \Rightarrow \det A = 0$

$\Rightarrow ad - bc = 0$ si $(a+d)A = 0$, deci $a + d = 0$ sau $\mathrm{A} = 0$ care da tot $\mathrm{a} + \mathrm{d} = 0$.

e) Fie $B \in M_2(\mathbf{R})$ nilpotent si n$\in$ $\mathbf{N}$ astfel ca $B^n = O_2$ si $B^{n-1} \neq O_2$. Avem det B=0 si

$B^n = (trB)B^{n-1} \Leftrightarrow 0 = (trB)B^{n-1} \Rightarrow trB = 0$

f) $A^n = 0, B^m = 0 \Rightarrow (A+B)^{m+n} = \sum_{k=0}^{m+n} C_{m+n}^k A^k \cdot B^{m+n-k} = 0$, deoarece $k \geq n$ sau $m+n-k \geq m$.

g) Presupunem că $\exists A_i \in M_2(\mathbf{R})$ nilpotentă a.î. $I_2 = \sum_{i=1}^n A_i$. Deoarece A_i nilpotentă $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_i^2 = O_2 \Rightarrow tr(\sum_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n (a_i + d_i) = 0 \neq trI_2 = 2$ (fals).

Subiectul IV:

a) $1 + a + ... + a^n + \frac{a^{n+1}}{1-a} = \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1}}{1-a} = \frac{1}{1-a}, \forall a \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$.

b) În pct. a), înlocuim $-\sqrt{x}$ în locul lui a şi obținem relația cerută.

c) $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}}$ (1) şi $\frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \sqrt{x}^{n+1}$ (2).

din (1), (2) $\Rightarrow$ inegalitatea cerută.

d) Din c) $\Rightarrow 0 \leq \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx \leq \int_0^b \sqrt{x}^{n+1} dx, \forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbf{N}^* \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \leq \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx \leq \frac{2 \cdot b^{\frac{n+3}{2}}}{n+3}$ şi din $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \begin{cases} 0, & b \in [0,1] \\ 1, & b = 1 \end{cases}$

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+3} \cdot b^{\frac{n+3}{2}} = 0, \forall b \in [0,1] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^b \frac{\sqrt{x}^{n+1}}{1+\sqrt{x}} dx = 0$.

e) $I_1 = \int_0^b \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int_1^{1+\sqrt{b}} \frac{1}{t} \cdot 2(t-1) dt = 2\sqrt{b} - 2\ln\left(1+\sqrt{b}\right)$

($1+\sqrt{x} = t \Rightarrow x = (t-1)^2 = \varphi(t) \Rightarrow \varphi'(t) = 2(t-1)dt$ şi $x_1 = 0, x_2 = b \Rightarrow t_1 = 1, t_2 = 1+\sqrt{b}$).

f) Din b) avem

$$\int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = t - \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot t^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1}\Bigg|_0^x + (-1)^{n+1} \cdot \int_0^x \frac{\sqrt{t}^{n+1}}{1+\sqrt{t}} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = \lim_{n\to\infty} \left[x + \frac{(-1)x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right] + L, \text{ unde}$$

$L = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{\sqrt{t}^{n+1}}{1+\sqrt{t}} dt = 0$ (din d)). Rezultă relația cerută.

g) Din e), f) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \left[x + \frac{(-1)x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{(-1)^2 x^{\frac{2}{2}+1}}{\frac{2}{2}+1} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} \right] = \int_0^x \frac{1}{1+\sqrt{t}} dt = F(x)$

F fiind funcție continua, neconstantă, deci imaginea să este un interval care conține şi numere rationale.